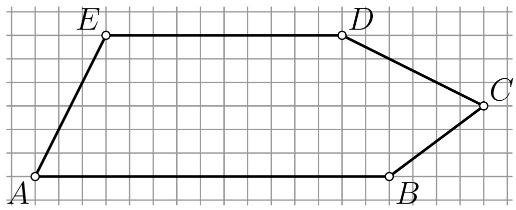
Úlohy krajského kola kategorie C

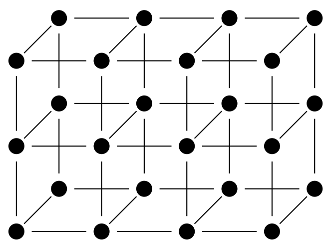
1. Dvojmístné číslo $\overline{ab}$ nazveme *nafouknutelné*, pokud z něj po přičtení 990násobku vhodného jednomístného čísla získáme čtyřmístné číslo tvaru $\overline{axxb}$ s nenulovou číslicí x. Kolik nafouknutelných čísel existuje?

2. Ve čtvercové síti leží pětiúhelník $ABCDE$, jehož vrcholy jsou v mřížových bodech stejně jako na obrázku. Dokažte, že tento pětiúhelník lze rozdělit na dva shodné čtyřúhelníky.



3. Kolika způsoby lze vybarvit čtvercovou tabulku 4×4 čtyřmi různými barvami tak, aby každé její pole bylo vybarveno právě jednou barvou a aby v každé z devíti menších čtvercových tabulek 2×2 byla každá barva právě jednou?

4. Lenka staví konstrukci tvaru kvádru z magnetických tyčinek délky 1 a kovových kuliček. Na konstrukci $2 \times 3 \times 1$ (viz obrázek) spotřebovala 46 tyčinek a 24 kuliček. Na jinou konstrukci $a \times b \times 1$, kde $b \geqq a \geqq 1$, spotřebovala 679 tyčinek. Kolik na ni spotřebovala kuliček? Určete všechny možnosti.



Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 1. dubna 2025

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Dvojmístné číslo $\overline{ab}$ nazveme* nafouknutelné*, pokud z něj po přičtení* 990*násobku vhodného jednomístného čísla získáme čtyřmístné číslo tvaru $\overline{axxb}$ s nenulovou číslicí x. Kolik nafouknutelných čísel existuje?* (Mária Dományová)

Řešení. Pro nafouknutelné číslo $\overline{ab}$ a jednomístné číslo $y \neq 0$ ze zadání platí

$$\overline{ab} + 990y = \overline{axxb},$$

tj.

$$10a + b + 990y = 1000a + 100x + 10x + b.$$

Po úpravě dostaneme

$$990y = 990a + 110x \tag{1}$$

a po vydělení obou stran poslední rovnosti číslem 110

$$9y = 9a + x.$$

Pro jednomístné číslo x tak platí $x = 9(y - a)$. To znamená, že x je dělitelné 9, jelikož $x \neq 0$, nastane to právě pro $x = 9$. Potom $y = a + 1$. Jelikož y je jednomístné, a může být jen $1, 2, \ldots, 8$. Pro a tak máme celkem 8 možností. Dále protože b může být libovolná číslice (i nula), je pro ni celkem 10 možností.

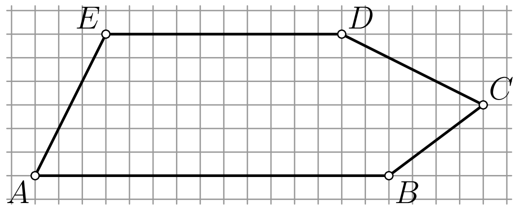
Závěr. Existuje tak $8 \cdot 10 = 80$ nafouknutelných čísel (a to $10, 11, 12, \ldots, 89$).

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

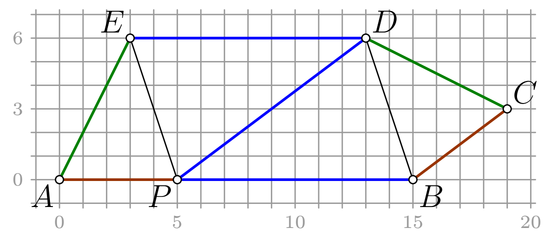
A1. Za odvození rovnosti (1) nebo ekvivalentní rovnosti udělte 2 body.
A2. Za hypotézu, že nutně $x = 9$, udělte 1 bod, pokud je zcela zdůvodněna, udělte 3 body.
B1. Za tvrzení, že a může nabývat libovolné hodnoty $1, 2, \ldots, 8$, udělte 1 bod.
B2. Za tvrzení, že b může nabývat libovolné hodnoty $0, 1, 2, \ldots, 9$, udělte 1 bod.
B3. Za výpočet správného počtu nafouknutelných čísel udělte 1 bod.
Za numerickou chybu strhněte max. 1 bod.
Celkově pak udělte max(A1, A2) + B1 + B2 + B3 bodů.

2. *Ve čtvercové síti leží pětiúhelník $ABCDE$, jehož vrcholy jsou v mřížových bodech stejně jako na obrázku. Dokažte, že tento pětiúhelník lze rozdělit na dva shodné čtyřúhelníky.*

(Jaroslav Zhouf, Josef Tkadlec)



Řešení. Hledané rozdělení na čtyřúhelníky $APDE$ a $PBCD$ je na obrázku. Nechť P je takový bod na straně AB, že $BDEP$ je rovnoběžník. Pak trojúhelníky PBD a DEP jsou shodné. Navíc jsou rovnoramenné, jelikož dle Pythagorovy věty $|PD|^2 = 8^2 + 6^2 = 10^2 = |PB|^2$.



Ukážeme, že i trojúhelníky BCD a PAE jsou shodné podle věty *sss*. Skutečně, $|BC|^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = |PA|^2$, $|CD|^2 = 3^2 + 6^2 = |AE|^2$ a $|BD|^2 = 6^2 + 2^2 = |PE|^2$. Tedy čtyřúhelníky $PBCD$ a $DEAP$ jsou shodné.

Komentář. Přestože výše uvedené řešení je úplné, uveďme ještě postup, jak se na takové rozdělení dá přijít. Uvažujme nejdřív rozdělení pětiúhelníku jedním přímým řezem. Řez nemůže procházet dvěma vrcholy, protože by rozdělil pětiúhelník na čtyřúhelník a trojúhelník. Pokud řez neprochází žádným vrcholem a jedna z částí bude čtyřúhelník, bude druhá část pětiúhelník. Řez tedy musí procházet jedním vrcholem a protilehlou stranou. Je hned jasné, že rozdělena musí být strana AB, protože je nejdelší, a tedy řez bude procházet bodem D. Z Pythagorovy věty (jako výše) nahlédneme, že $|CD| = |AE|$ a $|BC| = 5$, dále $|AB| = 15$, $|ED| = 10$. Bod P, průsečík řezu s AB, pak nutně musí splňovat $|AP| = |BC| = 5$.

Pro úplnost ještě uvažujme případ, kdy rozdělíme pětiúhelník lomenou čarou sestávající z $k \geqq 2$ úseček. I kdyby řez začínal a končil ve vrcholech a nerozdělil tak žádnou ze stran pětiúhelníku, pak výsledné mnohoúhelníky budou mít $n + k$ a $5 - n + k$ stran, tj. dohromady $5 + 2k \geqq 9$, nemohou to tedy být oba čtyřúhelníky. Tím jsme dokázali (i když to po nás zadání nevyžadovalo), že výše nalezené rozdělení je jediné.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A1. Za zdůvodněné tvrzení, že řez musí procházet bodem D a rozdělit stranu AB, udělte 1 bod.

A2. Za nalezení vhodného rozdělení bez správného zdůvodnění udělte 3 body.

B1. Za zdůvodnění rovnosti $|DC| = |AE|$ udělte 1 bod.

Za numerickou chybu strhněte nejvýše 1 bod.

Celkově potom udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}) + \mathrm{B1}$ bodů.

Poznámka. Na úplné zdůvodnění shodnosti vzniklých čtyřúhelníků nestačí jen konstatování, že oba mají stejně dlouhé příslušné strany. Za nezohlednění tohoto argumentu strhněte 2 body.

3. *Kolika způsoby lze vybarvit čtvercovou tabulku 4×4 čtyřmi různými barvami tak, aby každé její pole bylo vybarveno právě jednou barvou a aby v každé z devíti menších čtvercových tabulek 2×2 byla každá barva právě jednou?* (Jana Kopfová)

Řešení. Ve všech řešeních budeme číslovat řádky shora a sloupce zleva. Barvy si označíme kvůli zjednodušení zápisu písmeny A, B, C, D. Označme pole tabulky (a, b), kde a je číslo řádku a b číslo sloupce, $a, b = 1, \ldots, 4$.

Tabulku začneme vyplňovat uprostřed, prostřední tabulku 2×2 můžeme vyplnit podle zadání $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ způsoby. Máme totiž na výběr čtyři barvy pro vyplnění prvního pole, tři pro vyplnění druhého, dvě pro vyplnění třetího a na čtvrté pole nám zbývá poslední barva.

Zafixujme barvy prostřední tabulky jako na obrázku, bez újmy na obecnosti A, B, C, D značí libovolné pořadí barev. Všimněme si, že na polích $(1, 2)$ a $(1, 3)$ je nutně stejná dvojice barev jako na polích $(3, 2)$ a $(3, 3)$ (buď CD jako na levém obrázku, nebo DC). Podobně na polích $(2, 1)$, $(3, 1)$ musí být stejná dvojice barev jako na polích $(2, 3)$, $(3, 3)$. Totéž platí pro dvojici polí napravo od středové tabulky 2×2 a také pro dvojici polí pod středovou tabulkou 2×2. Jedno takové vyhovující obarvení je na levém obrázku (barvy rohových polí jsou pak už určeny jednoznačně). Nyní si uvědomme, že v kterékoli právě jedné z těchto čtyř dvojic polí (na obrázku šedě) můžeme barvy zaměnit. To nám dává další 4 obarvení (rohová pole jsou opět určena jednoznačně). Uvědomme si, že nemůžeme zároveň zaměnit barvy ve dvou sousedních dvojicích. Opravdu, pokud vyměníme barvy v horní dvojici, tak jako na pravém obrázku, pak barvy levé i pravé dvojice už zaměnit nemůžeme. Pokud tedy chceme vyměnit barvy ve více než jedné dvojici, musí to být buď horní a dolní dvojice, nebo levá a pravá. To nám dává další 2 obarvení.

	C	D	
B	A	B	A
D	C	D	C
	A	B	

	D	C	
B	A	B	A
D	C	D	C
	A	B	

Je proto 24 možností pro jedno konkrétní obarvení prostředního čtverce, dohromady $24 \cdot (1 + 4 + 2) = 168$ možností.

Jiné řešení. Na rozdíl od předchozího řešení začneme vybarvením levého horního čtverce. Podobně jako v prvním řešení zdůvodníme, že ho lze vybarvit právě 24 způsoby. Pro barvu na poli $(3, 3)$ pak rozlišíme tři možné případy: I: A, II: B, III: C.

A	B	A	
C	D	C	
A	B	A	

A	B	A	
C	D	C	
B	A	B	

A	B	C	
C	D	A	
A	B	C	

Ukážeme, že v případech I, II, III existují po řadě 3, 2, 2 vyhovující obarvení, odkud již dostaneme výsledek $24 \cdot (3 + 2 + 2) = 168$.

V případě I máme nutně v levém horním rohu tabulku 3×3 s řádky A, B, A; C, D, C a A, B, A. Pro každou ze tří možných voleb z B, C, D na poli $(4, 4)$ pak jednoznačně obarvíme zbylá pole ve čtvrtém řádku i čtvrtém sloupci.

A	B	A	D
C	D	C	B
A	B	A	D
C	D	C	B

A	B	A	B
C	D	C	D
A	B	A	B
D	C	D	C

A	B	A	B
C	D	C	D
A	B	A	B
C	D	C	D

V případě II máme nutně nahoře tabulku 3×4 s řádky A, B, A, B; C, D, C, D a B, A, B, A. Proto nutně $(4, 4) \in \{C, D\}$. Pro čtvrtý řádek celé tabulky tak skutečně máme dvě možnosti, totiž D, C, D, C a C, D, C, D.

A	B	A	B
C	D	C	D
B	A	B	A
D	C	D	C

A	B	A	B
C	D	C	D
B	A	B	A
C	D	C	D

Obarvené tabulky z případu II lze spárovat s obarvenými tabulkami z případu III užitím osové souměrnosti a záměnou barev B a C. Proto v případě III máme zase dvě možnosti.

Jiné řešení. Nechť je první řádek tvořen aspoň třemi barvami a začíná A, B, C. Pak pod B je nutně barva D, pod A barva C a pod barvou C je barva A.

A	B	C	
C	D	A	

Pro vybarvení posledního pole prvního řádku pak máme dvě možnosti – B nebo D. Obarvení druhého řádku je v obou případech již jednoznačně určeno obarvením prvního řádku. Navíc druhý řádek začíná stejně jako první třemi různými barvami a jeho čtvrté pole nemá stejnou barvu jako první. Tedy i obarvení dalšího řádku a tedy i celého čtverce je již jednoznačně určeno. Máme tak $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ možností pro vybarvení prvního řádku a tím i celé tabulky.

Pokud je první řádek tvořen alespoň třemi barvami, ale nejsou tři různé barvy na prvních třech polích, pak jsme nutně v situaci A, B, A, C, tj. první a třetí pole mají stejnou barvu a druhé, třetí a čtvrté pole mají různé barvy. Můžeme teď zopakovat myšlenku dle předchozího odstavce, ale při pohledu zprava. Dostaneme tak dalších 24 možností.

Zbývá vyřešit případ, kdy je první řádek tvořen jen dvěma barvami, např. A, B, A, B (nutně je jedna barva na prvním a třetím poli a druhá na zbývajících dvou). Pak pro další řádek máme dvě možnosti D, C, D, C, nebo C, D, C, D, a taky pro každý další řádek máme vždy další dvě možnosti. Pro první řádek máme $4 \cdot 3$ možností (volíme barvu na prvním místě a pak barvu na druhém místě). Pro další řádky pak máme $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností. Celkem $12 \cdot 8 = 96$ možností.

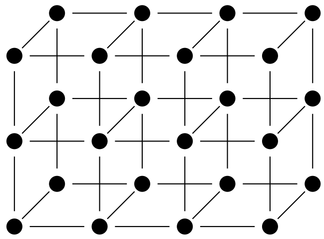
Závěr. Dohromady je to $48 + 24 + 96 = 168$ možností.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Za tvrzení, že tabulku 2×2 lze požadovaným způsobem vybarvit 24 způsoby, udělte 1 bod, pokud je tvrzení úplně zdůvodněné, udělte 2 body.

Další 1–3 body udělte dle úplnosti rozboru možných případů. Za numerickou chybu při sčítání či násobení strhněte jeden bod.

4. *Lenka staví konstrukci tvaru kvádru z magnetických tyčinek délky 1 a kovových kuliček. Na konstrukci $2 \times 3 \times 1$ (viz obrázek) spotřebovala 46 tyčinek a 24 kuliček. Na jinou konstrukci $a \times b \times 1$, kde $b \geqq a \geqq 1$, spotřebovala 679 tyčinek. Kolik na ni spotřebovala kuliček? Určete všechny možnosti.*
(Jana Kopfová, Lenka Kopfová, Josef Tkadlec)



Řešení. Nechť a je výška konstrukce, b její šířka. Spočtěme nejprve počet tyčinek v přední vrstvě. Ty vodorovné leží v $a+1$ řádcích, každý z nich obsahuje b tyčinek, svislé tyčinky leží v $b+1$ sloupcích, každý z nich obsahuje a tyčinek. V přední vrstvě proto máme $b(a+1)+a(b+1)$ tyčinek. Stejný počet tyčinek máme i v zadní vrstvě.

Navíc máme tyčinky, které spojují přední a zadní vrstvu. Těch je ve spodní vodorovné rovině $b+1$ a takových rovin je $a+1$. Celkový počet potřebných tyčinek je proto $2a(b+1)+2b(a+1)+(a+1)(b+1)$. Hledáme tak přirozená čísla a a b, která vyhovují rovnici

$$2a(b+1)+2b(a+1)+(a+1)(b+1) = 679.$$

Roznásobením této rovnosti získáme

$$5ab+3a+3b+1 = 679. \tag{1}$$

Metodou z návodné úlohy N3 z domácího kola rozložíme levou stranu na součin

$$5ab+3a+3b+1 = (5a+3)(b+\tfrac{3}{5})-\tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5}\big((5a+3)(5b+3)-4\big)$$

a rovnici převedeme do tvaru

$$(5a+3)(5b+3) = 679 \cdot 5 + 4 = 3399 = 3 \cdot 11 \cdot 103.$$

Jelikož jsou čísla $5a+3$ a $5b+3$ přirozená a větší než 3 a všechny možné rozklady čísla 3399 na součin takových dvou přirozených čísel jsou $3399 = 33 \cdot 103 = 11 \cdot 309$, dostáváme, že $5a+3=33$ a $5b+3=103$, nebo $5a+3=11$ a $5b+3=309$.

Vyřešením rovnic $5a+3=33$ a $5b+3=103$ dostaneme $(a,b)=(6,20)$. Rovnice $5a+3=11$ a $5b+3=309$ nemají celočíselná řešení. Případně si můžeme všimnout, že čísla $5a+3$, $5b+3$ musí končit trojkou nebo osmičkou. Jediná vyhovující dvojice proto je $(a,b)=(6,20)$. Lenka tak na konstrukci spotřebovala $2 \cdot (6+1) \cdot (20+1) = 294$ kuliček.

Poznámka. Alternativně můžeme ke stejnému závěru dospět přes vyjádření si jedné z neznámých z rovnice (1). Vyjádřením neznámé a dostaneme

$$a = \frac{678-3b}{5b+3},$$

po vynásobení 5 a následné úpravě jako v domácím kole dostaneme

$$5a = \frac{-3(5b+3)+9+5\cdot 678}{5b+3} = -3 + \frac{3399}{5b+3}.$$

Dále můžeme buď dostat součinový tvar (1) a postupovat jako výše, nebo můžeme pokračovat hledáním přirozených dělitelů čísla 3399.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A1. Za správné vyjádření počtu potřebných tyčinek pomocí a a b udělte 2 body, z toho 1 bod za správné zdůvodnění.

A2. Za úpravu rovnice na součinový tvar udělte 2 body.

A3. Za nalezení řešení udělte 1 bod.

Za numerickou chybu strhněte max. 1 bod.

Celkově potom udělte A1 + A2 + A3 bodů.