74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Úlohy školního kola kategorie B

1. Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Potom každou jeho dvojici po sobě jdoucích číslic interpretujeme jako dvojmístné číslo a těchto osm čísel napíšeme na tabuli.

a) Kolik nejvíce mocnin prvočísel mezi nimi může být?

b) Kolik různých devítimístných čísel nás k tomuto počtu dovede?

(Uvažujeme jen mocniny prvočísel s celočíselným exponentem větším než 1.)

2. Uvnitř pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou BC leží bod D takový, že $AD \perp BD$. V polorovině určené přímkou AD neobsahující bod B leží čtverec $ADEF$. Dokažte, že přímka EF prochází bodem C.

3. Pro přirozená čísla r, s platí, že zlomek r/s leží v intervalu $\langle 23/45; 46/89 \rangle$. Jakou nejmenší hodnotu může mít jmenovatel s?

Školní kolo kategorie B se koná

v úterý 28. ledna 2025

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Potom každou jeho dvojici po sobě jdoucích číslic interpretujeme jako dvojmístné číslo a těchto osm čísel napíšeme na tabuli.*

a) Kolik nejvíce mocnin prvočísel mezi nimi může být?

b) Kolik různých devítimístných čísel nás k tomuto počtu dovede?

(Uvažujeme jen mocniny prvočísel s celočíselným exponentem větším než 1.)

(Dominik Rigasz)

Řešení. Nejprve si vypíšeme všechny dvojmístné mocniny prvočísel uspořádané podle prvočísel, která jsou jejich základem: 16, 32, 64, 27, 81, 25, 49. Pro prvočísla 11 a větší jsou jejich mocniny alespoň trojmístné. Čísla 25 a 27 nemohou být na tabuli napsána současně, nemůžeme tak mít na tabuli více než 6 mocnin prvočísel. Dále ukážeme, že 6 mocnin dosáhnout lze, současně vyřešíme i část b).

Abychom na tabuli získali 6 mocnin prvočísel, tak se na ní musí objevit každá z mocnin 16, 32, 64, 81, 49. Čísla 81, 16, 64 a 49 musí být napsána v tomto pořadí, jelikož mají společné číslice a každá číslice se v devítimístném čísle vyskytne právě jednou. Hledané číslo tak obsahuje blok číslic 81649. Pokud na tabuli bude 25, tak číslo musí obsahovat i blok 325. Zbyla nám ještě číslice 7. Hledané číslo se tak skládá ze tří bloků číslic 81649, 325, 7. Přitom každé číslo vytvořené z těchto bloků (v libovolném pořadí) zřejmě vyhovuje podmínkám ze zadání. Pro uspořádání těchto bloků máme $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností, protože první blok (zleva) vybíráme ze tří možných, druhý ze dvou a na závěr nám zůstane jediný blok.

Pokud by na tabuli namísto 25 bylo 27, dostali bychom rovněž tři bloky čísel 81649, 327, 5, které opět uspořádáme 6 způsoby.

Na tabuli může být napsáno nejvýše 6 mocnin prvočísel, tento počet získáme z $6 + 6 = 12$ různých devítimístných čísel.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních ohodnoťte kroky z výše popsaného postupu následovně:

A1. Vypsání všech dvojmístných mocnin prvočísel: 1 bod

A2. Zdůvodnění, že na tabuli nemůže být napsáno všech 7 dvojic: 1 bod

A3. Objevení, že hledané číslo musí obsahovat jisté bloky číslic (bod udělte i v případě, kdy některý blok je nesprávný nebo chybí): 1 bod

A4. Uvedení jednoho příkladu čísla, pro které dostaneme na tabuli 6 mocnin: 1 bod

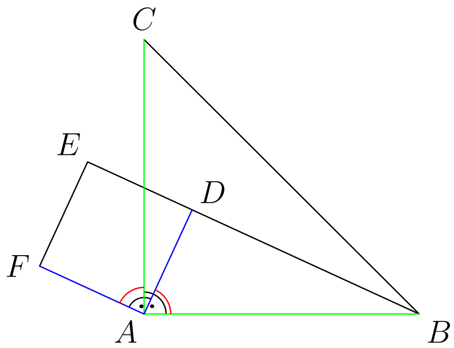
A5. Určení počtu všech výchozích devítimístných čísel (ať už výpočtem nebo vypsáním): 3 body

Celkově pak za neúplná řešení udělte $A1 + A2 + A3 + \max(A4, A5)$ bodů. Za část a) udělte nejvýše 3 body $(A1 + A2 + A4)$.

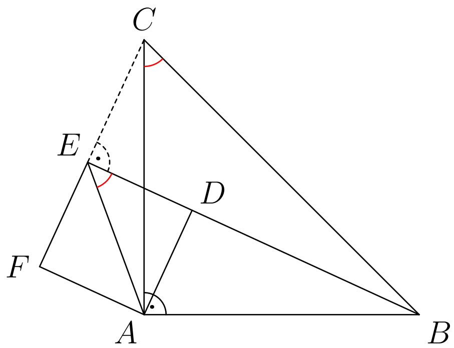
Pokud řešitel nesprávně vypíše požadované mocniny, udělte 0 bodů za část A1 a za zbývající části můžete udělit plný počet bodů, pokud řešitel ve svém řešení použil ekvivalentní nebo náročnější myšlenky. Např. pokud řešitel jen zapomene na 49, princip řešení úlohy se nezmění a může získat až 5 bodů. Pokud řešitel zapomene na 27, nemůže získat body za A2, jelikož v takovém případě lze na tabuli napsat všechny řešitelem nalezené mocniny, a může získat nejvýše 4 body.

2. *Uvnitř pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou BC leží bod D takový, že $AD \perp BD$. V polorovině určené přímkou AD neobsahující bod B leží čtverec $ADEF$. Dokažte, že přímka EF prochází bodem C.* (Patrik Bak)

Řešení 1. Trojúhelníky ABD a ACF mají shodné dvojice stran $|AB| = |AC|$ (ramena trojúhelníku ABC) a $|AD| = |AF|$ (strany čtverce). Tyto strany také svírají shodný úhel, protože platí $|\sphericalangle BAD| = 90° - |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAF|$. Proto jsou trojúhelníky ABD a ACF shodné podle věty *sus*. Odtud plyne, že přímka CF je kolmá ke straně AF. Stejně tak je ke straně AF kolmá i přímka EF. Proto na přímce EF leží i bod C, jak jsme měli dokázat.



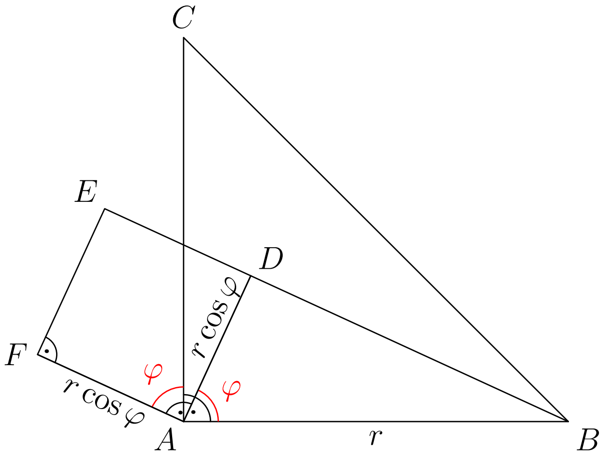
Řešení 2. Všimněme si, že $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle AED| = 45° = |\sphericalangle ACB|$ (a bod E zjevně leží v polorovině ABC), body A, E, C, B tak leží podle věty o obvodovém úhlu na téže kružnici. Proto $|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BAC| = 90°$. Jelikož i $|\sphericalangle FEB| = 90°$, tak $|\sphericalangle FEC| = 180°$. Přímka EF proto prochází bodem C a jsme hotovi.



Řešení 3. Označme $r = |AB| = |AC|$ délku ramene trojúhelníku ABC a $\varphi = |\sphericalangle DAB|$.[1] Z pravoúhlého trojúhelníku ABD vyjádříme délku strany čtverce $|AD| = r\cos\varphi$. Také si umíme vyjádřit $|\sphericalangle CAF| = 90° - |\sphericalangle DAC| = 90° - (90° - \varphi) = \varphi$. Označme C' průsečík přímek FE a AC. Z pravoúhlého trojúhelníku $C'AF$ vyjádříme

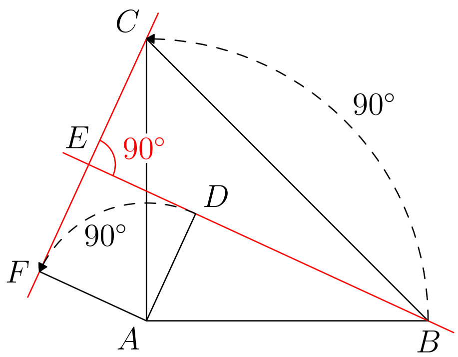
$$|C'A| = \frac{|AF|}{\cos\varphi} = \frac{r\cos\varphi}{\cos\varphi} = r.$$

[1] Těmito dvěma parametry je jednoznačně popsána celá situace: tvar trojúhelníku ABC vyplývá z toho, že je rovnoramenný a pravoúhlý, r určuje jeho velikost, a poloha bodu D je určena úhly DAB a ADB. Proto lze očekávat, že jakékoli další potřebné úhly a vzdálenosti bude možné vyjádřit pomocí r a φ.



Tedy přímka FE protíná přímku AC ve vzdálenosti r od bodu A zřejmě v polorovině ABC. To však znamená, že tímto průsečíkem je právě bod C, což jsme chtěli ukázat.

Řešení 4. Uvažujme otočení se středem v bodě A o $90°$. Při tomto otočení se bod B zobrazí na bod C a bod D se zobrazí na bod F. Přímka BD se tak zobrazí na přímku CF. Jelikož otáčíme o $90°$, tak přímka CF musí být kolmá na přímku BD. Avšak na přímku BD je kolmá i přímka EF. Proto přímka EF musí procházet bodem C.



Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních rozdělte body následovně:

K. Důkaz, že některý z úhlů CEB a CFA je pravý nebo podobné tvrzení, ze kterého přímo plyne, že přímka EF prochází bodem C: 5 bodů

Z. Konstatování, že z předchozího bodu vyplývá dokazované tvrzení: 1 bod (Tento bod udělte i pokud důkaz z A1 není úplný nebo i když řešitel jen zredukuje důkaz tvrzení z úlohy na důkaz kolmosti přímek.)

Neúplné důkazy ohodnoťte podle následujících schémat:

Při postupu podle prvního řešení (přes shodnost trojúhelníků) udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}) = \mathrm{A}$ částečných bodů, kde:

A1. Důkaz $|\sphericalangle CAF| = |\sphericalangle DAB|$: 2 body

A2. Důkaz, že trojúhelníky ABD a ACF jsou shodné: 4 body

Při postupu podle druhého řešení (užitím 4 bodů na kružnici) udělte $\mathrm{B1} + \mathrm{B2} = \mathrm{B}$ částečných bodů, kde:

B1. Hypotéza, že body A, E, C, B leží na jedné kružnici: 1 bod

B2. Důkaz hypotézy: 3 body

Při postupu podle třetího řešení (goniometrického) udělte $\mathrm{C1} + \mathrm{C2} = \mathrm{C}$ částečných bodů, kde:

C1. Vyjádření délky strany čtverce $ADEF$ pomocí délky ramene, resp. podobný vztah mezi ramenem a stranou čtverce: 1 bod

C2. Důkaz $|\sphericalangle CAF| = |\sphericalangle DAB|$: 2 body

Při postupu podle čtvrtého řešení (otočení) udělte $\mathrm{D1} + \mathrm{D2} + \mathrm{D3} = \mathrm{D}$ částečných bodů, kde:

D1. Konstatování, že bod B se zobrazí na bod C v otočení o 90° kolem bodu A: 1 bod

D2. Konstatování, že ve stejném otočení se zobrazí D na F: 1 bod

D3. Konstatování, že proto se přímka BD zobrazí na CF: 2 body

Celkově pak za neúplná řešení udělte $\max(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{K}) + \mathrm{Z}$ bodů.

3. *Pro přirozená čísla r, s platí, že zlomek r/s leží v intervalu $\langle 23/45; 46/89\rangle$. Jakou nejmenší hodnotu může mít jmenovatel s?* (Pavel Calábek)

Řešení 1. V závislosti na čitateli r zkoumejme, jaký může být jmenovatel zlomku r/s. Jelikož $\frac{23}{45} > \frac{1}{2}$, tak i $\frac{r}{s} > \frac{1}{2}$. Odtud plyne $s < 2r$, tedy
$$s \leqq 2r - 1.$$
Proto
$$\frac{r}{2r-1} \leqq \frac{r}{s} \qquad \text{a dle zadání} \qquad \frac{r}{s} \leqq \frac{46}{89}.$$
Jelikož zlomek r/s splňuje obě tyto nerovnosti, platí
$$\frac{r}{2r-1} \leqq \frac{46}{89}.$$
Odtud dostaneme úpravou $46 \leqq 3r$, tedy $r \geqq 16$. Z nerovnosti $\frac{r}{s} \leqq \frac{46}{89}$ pak dostaneme $s \geqq \frac{89r}{46} \geqq \frac{16\cdot 89}{46}$, tedy $s \geqq 31$. Tato hodnota je dosažitelná, protože se zlomek $\frac{16}{31}$ opravdu nachází v požadovaném intervalu: Nerovnost $\frac{16}{31} \leqq \frac{46}{89}$ plyne z použitých ekvivalentních úprav. Nerovnost $\frac{16}{31} \geqq \frac{23}{45}$ je ekvivalentní nerovnosti $16 \cdot 45 = 720 \geqq 713 = 31 \cdot 23$.

Tedy hledaná nejmenší hodnota jmenovatele uvažovaného zlomku r/s je 31.

Komentář. Důkaz nerovnosti $r \geqq 16$ lze formulovat i nepřímo nebo sporem: Pokud by platilo $r < 16$, tak by zlomek r/s neležel v požadovaném intervalu pro žádné s – pro $s \geqq 2r$ bychom měli $\frac{r}{s} \leqq \frac{1}{2} < \frac{23}{45}$ a pro $s = 2r - 1$ by už zlomek $\frac{r}{2r-1}$ byl větší než $\frac{46}{89}$, což by rovněž platilo i pro menší hodnoty s.

Řešení 2. V tomto řešení budeme naopak hledat možné hodnoty čitatele r v závislosti na s. Jelikož $\frac{r}{s} \geqq \frac{24}{45} > \frac{1}{2}$, tak musí platit $r > \frac{1}{2}s$. Dále budeme samostatně uvažovat sudá a lichá s.

Nechť s je sudé, tedy $s = 2k$ pro nějaké přirozené k. Z nerovnosti $r > \frac{1}{2} \cdot 2k = k$ dostáváme $r \geqq k + 1$. Platí také
$$\frac{k+1}{2k} \leqq \frac{r}{s} \leqq \frac{46}{89},$$
z čehož dostaneme $k \geqq \frac{89}{3}$, tedy $k \geqq 30$. Pro sudé s tak platí $s \geqq 2 \cdot 30 = 60$.

Nechť s je liché, tedy $s = 2k - 1$ pro nějaké přirozené číslo k. Z podmínky $r > \frac{1}{2}s$ obdobně dostaneme $r \geqq k$. Jelikož platí
$$\frac{k}{2k-1} \leqq \frac{r}{s} \leqq \frac{46}{89},$$
tak platí $k \geqq \frac{46}{3}$, tedy $k \geqq 16$. To znamená, že $s \geqq 2 \cdot 16 - 1 = 31$.

Z obou případů plyne $s \geqq 31$. Tato hodnota je opravdu dosažitelná, jelikož jí odpovídá $r = k = 16$. Tehdy se zlomek $16/31$ opravdu nachází v intervalu $\langle 23/45; 46/89\rangle$, což snadno ověříme výpočtem.

Komentář. Odhad $s \geqq 31$ můžeme získat i bez dělení podle parity s. Z nerovnosti $r > \frac{1}{2}s$ plyne $r \geqq \frac{1}{2}(s + 1)$. Potom máme
$$\frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s} \leqq \frac{r}{s} \leqq \frac{46}{89},$$
tedy $89(s + 1) \leqq 46 \cdot 2s$, z čehož dostaneme $s \geqq 30$. Avšak pro $s = 30$ je $r \geqq \frac{31}{2}$, tedy $r \geqq 16$ a platí $\frac{r}{30} \geqq \frac{16}{30} > \frac{46}{89}$. Proto musí platit odhad $s \geqq 31$.

Řešení 3. Podle zadání má platit

$$\frac{23}{45} \leqq \frac{r}{s} \qquad \text{a} \qquad \frac{r}{s} \leqq \frac{46}{89}.$$

Odstraněním zlomků získáme $23s \leqq 45r$ a $89r \leqq 46s$. Po vynásobení první nerovnosti dvěma zapíšeme obě nerovnosti společně jako

$$89r \leqq 46s \leqq 90r.$$

Po odečtení $92r$ dostaneme $-3r \leqq 46s - 92r \leqq -2r$, z čehož po vynásobení -1 dostáváme

$$3r \geqq 46(2r - s) \geqq 2r.$$

Z nerovnosti $46(2r - s) \geqq 2r$ vyplývá, že $2r - s$ je kladné, tedy $2r - s \geqq 1$. Z nerovnosti $3r \geqq 46(2r - s)$ tak získáme $3r \geqq 46$, čímž dostaneme odhad $r \geqq 16$. Z nerovnosti $89r \leqq 46s$ pak dostaneme $s \geqq \frac{89 \cdot 16}{46}$, tedy $s \geqq 31$. Hodnota $s = 31$ je dosažitelná, jelikož $16/31 \in \langle 23/45; 46/89 \rangle$, což lze snadno ověřit výpočtem.

Řešení 4. Podle zadání pro převrácený zlomek s/r platí

$$1 + \frac{43}{46} = \frac{89}{46} \leqq \frac{s}{r} \leqq \frac{45}{23} = 1 + \frac{22}{23}.$$

Odtud plyne

$$\frac{43}{46} \leqq \frac{s}{r} - 1 = \frac{s - r}{r} \leqq \frac{22}{23}.$$

Číslo $s - r$ je proto kladné a po opětovném převrácení platí

$$1 + \frac{1}{22} = \frac{23}{22} \leqq \frac{r}{s - r} \leqq \frac{46}{43} = 1 + \frac{3}{43},$$

tedy

$$\frac{1}{22} \leqq \frac{r}{s - r} - 1 = \frac{2r - s}{s - r} \leqq \frac{3}{43}.$$

Proto i číslo $2r - s$ musí být kladné a podobně dále máme

$$14 + \frac{1}{3} = \frac{43}{3} \leqq \frac{s - r}{2r - s} \leqq 22.$$

Jelikož $2r - s \geqq 1$, tak $s - r \geqq 14 + \frac{1}{3}$, tedy $s - r \geqq 15$, opětovným využitím $2r - s \geqq 1$ tak dostáváme $r + 15 \leqq s \leqq 2r - 1$. To nám dává $r \geqq 16$ a následně $s \geqq 31$. Hodnota $s = 31$ je dosažitelná, jelikož $16/31 \in \langle 23/45; 46/89 \rangle$, což můžeme snadno ověřit výpočtem. (Díky ekvivalentním úpravám by nám stačilo ověřit poslední nerovnost, kde pro $r = 16$ a $s = 31$ dostaneme $14 + \frac{1}{3} \leqq 15 \leqq 22$.)

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních ohodnoťte kroky z výše popsaného postupu následovně:

A. Uvedení správného výsledku $s = 31$ spolu s ukázáním, že zlomek $16/31$ patří do požadovaného intervalu. Stačí, když ověření implicitně vyplývá z postupu nalezení zlomku $16/31$. Avšak nerovnost $16/31 \geqq 23/45$ je třeba ověřit, pokud řešitel vychází ze slabší nerovnosti $r/s > 1/2$ (jak je to v prvních třech vzorových řešeních) : 1 bod

B1. Důkaz nerovnosti $s \geqq 31$ buď pro všechna lichá s, nebo pro všechna sudá s: 3 body
B2. Důkaz nerovnosti $r \geqq 16$: 4 body
B3. Důkaz nerovnosti $s \geqq 30$: 4 body
B4. Důkaz nerovnosti $s \geqq 31$: 5 bodů
C. Dílčí pokrok k důkazu nerovností z předchozích bodů podle schématu níže.
Celkově pak za neúplná řešení udělte $\mathrm{A} + \max(\mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3}, \mathrm{B4}, \mathrm{C})$ bodů.

Při postupu podle 1. vzorového řešení (při zkoumání závislosti s na r) udělte $\mathrm{D} = \max(\mathrm{D1}, \mathrm{D2}, \mathrm{D3})$ bodů za:
D1. Důkaz nerovnosti $s < 2r$: 1 bod
D2. Důkaz nerovnosti $s \leqq 2r - 1$: 2 body
D3. Důkaz nerovnosti $r/(2r-1) \leqq r/s$: 3 body

Při postupu podle 2. vzorového řešení (při zkoumání závislosti r na s) udělte $\mathrm{E} = \max(\mathrm{E1}, \mathrm{E2}, \mathrm{E3}, \mathrm{E4}, \mathrm{E5})$ bodů za:
E1. Důkaz nerovnosti $r > s/2$: 1 bod
E2. Důkaz nerovnosti $r \geqq (s+1)/2$: 2 body
E3. Rozdělení rozboru nerovnosti $r > s/2$ na dva případy, pro sudé a liché s: 2 body
E4. Důkaz jedné z nerovností $(k+1)/(2k) \leqq r/s$ (pro sudé s) nebo $k/(2k-1) \leqq r/s$ (pro liché s): 3 body
E5. Důkaz obou nerovností: 4 body

Při postupu podle 3. vzorového řešení udělte $\mathrm{F} = \min(\mathrm{F1} + \mathrm{F2} + \mathrm{F3}, 3)$ bodů za:
F1. Sdružený zápis dvou nerovností $89r \leqq 46s \leqq 90r$: 1 bod
F2. Dolní odhad r (resp. $3r$) pomocí $2r - s$: 1 bod
F3. Důkaz $2r - s \geqq 1$: 2 body

Při postupu podle 4. vzorového řešení udělte $\mathrm{G} = \max(\mathrm{G1}, \mathrm{G2}, \mathrm{G3})$ bodů za:
G1. Určení intervalu pro převrácený zlomek s/r: 1 bod
G2. Určení intervalu pro zlomek $(s-r)/(2r-s)$: 2 body
G3. Odvození odhadů $2r - s \geqq 1$ a $s - r \geqq 15$: 3 body
Za body v části C pak udělte $\mathrm{C} = \max(\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G})$ bodů.