II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Najděte všechna dvojmístná přirozená čísla, která mají následující vlastnost: Když před číslo připíšeme součin jeho první číslice a jeho první číslice zvětšené o 1, dostaneme druhou mocninu původního čísla. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Číslici na místě desítek označíme a, číslici na místě jednotek označíme b. Hledaná čísla jsou tvaru $10a + b$, kde $a = 1, \ldots, 9$, $b = 0, \ldots, 9$ a platí

$$100a(a + 1) + 10a + b = (10a + b)^2.$$

Po úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 100a^2 + 100a + 10a + b &= 100a^2 + 20ab + b^2, \\ 110a + b &= 20ab + b^2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Číslo v rovnosti $(*)$ je vícemístné. Aby souhlasily číslice na místě jednotek, musí být číslice na místě jednotek v b^2 stejná jako b. Této podmínce vyhovují pouze číslice 0, 1, 5 a 6. Postupně dosadíme všechny možnosti do $(*)$ a dořešíme:

- Pro $b = 0$ dostáváme
  $$110a = 0.$$
  Jediným řešením této rovnice je $a = 0$, což není vyhovující možnost.
- Pro $b = 1$ dostáváme
  $$110a + 1 = 20a + 1.$$
  Jediným řešením této rovnice je $a = 0$, což není vyhovující možnost.
- Pro $b = 5$ dostáváme
  $$110a + 5 = 100a + 25.$$
  Jediným řešením této rovnice je $a = 2$, což je vyhovující možnost.
- Pro $b = 6$ dostáváme
  $$110a + 6 = 120a + 36.$$
  Jediným řešením této rovnice je $a = -3$, což není vyhovující možnost.

Jediné číslo s vlastností ze zadání je 25.

Hodnocení. 2 body za formulaci pomocí rovnice a úpravy; 2 body za určení možností pro číslici b; 2 body za dořešení a závěr.

Bez neznámých a a b lze úlohu řešit zkoušením možností. V takovém případě hodnoťte podle úplnosti postupu a komentáře; za ověřený výsledek bez diskuze dalších možností udělte 1 bod.

Z9–II–2

Petr napsal na tabuli tři čísla od největšího po nejmenší. Prostřední číslo bylo aritmetickým průměrem zbylých dvou čísel. Součet aritmetického průměru prvního a druhého čísla a aritmetického průměru druhého a třetího čísla byl 628, rozdíl těchto dvou průměrů byl 83.

Která čísla napsal Petr na tabuli? (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Rozdíl aritmetického průměru dvou čísel od každého z těchto čísel je (v absolutní hodnotě) stejný. Mezi čísly na tabuli jsou tedy stejné rozdíly a stejně tak, mezi těmito čísly a dalšími dvěma aritmetickými průměry.

Čísla na tabuli od největšího po nejmenší označíme a, b, c, aritmetický průměr a a b označíme p, aritmetický průměr b a c označíme q. Těchto pět čísel lze vyjádřit pomocí neznámé x takto:

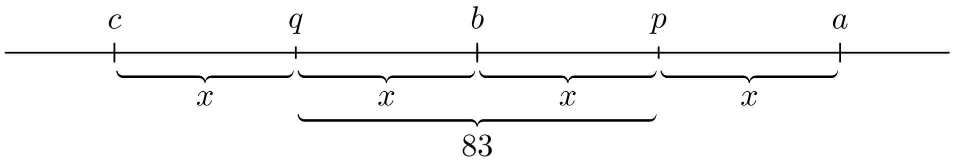
$$a = b + 2x, \quad p = b + x, \quad b, \quad q = b - x \quad c = b - 2x.$$

Z podmínky $p + q = 628$ dostáváme $2b = 628$, tedy $b = 314$. Z podmínky $p - q = 83$ dostáváme $2x = 83$. Celkem:

$$a = 314 + 83 = 397, \quad c = 314 - 83 = 231.$$

Petr napsal čísla 397, 314 a 231.

Poznámka. Znázornění předchozích myšlenek na číselné ose vypadá takto:



Jiné řešení. Čísla na tabuli od největšího po nejmenší označíme a, b, c. Prostřední je aritmetickým průměrem zbylých, tedy $b = \frac{a+c}{2}$. Aritmetický průměr prvního a druhého čísla je

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a + \frac{a+c}{2}}{2} = \frac{3a+c}{4},$$

aritmetický průměr druhého a třetího čísla je

$$\frac{b+c}{2} = \frac{\frac{a+c}{2} + c}{2} = \frac{a+3c}{4}.$$

Z informací o součtu a rozdílu těchto dvou průměrů dostáváme

$$a + c = 628, \quad a - c = 166.$$

Součet a rozdíl těchto dvou rovnic dává

$$2a = 628 + 166, \quad 2c = 628 - 166.$$

Celkem:

$$a = 314 + 83 = 397, \quad c = 314 - 83 = 231, \quad b = \frac{397 + 231}{2} = 314.$$

Petr napsal čísla 397, 314 a 231.

Hodnocení. 2 body za formulaci pomocí neznámých, příp. znázornění na číselné ose; 2 body za dílčí postřehy a úpravy; 2 body za výsledek a kvalitu komentáře.

Z9–II–3

Včera vydojili na farmě Doj dvakrát více mléka než na farmě Hoj a na farmě Joj dvakrát více mléka než na farmě Doj. Každá farma poslala část vydojeného mléka ke zpracování na máslo. Farma Doj poslala na výrobu másla 7/8 jejich mléka, farma Hoj 3/4 jejich mléka. Z mléka vydojeného na všech třech farmách dohromady šlo na výrobu másla 90 %.

Jakou část jejich mléka poslala na výrobu másla farma Joj? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Množství mléka vydojeného na farmě Hoj označíme h. Množství mléka vydojeného na farmě Doj bylo $2h$, na farmě Joj $4h$ a na všech třech farmách dohromady $7h$.

Množství mléka, které šlo na výrobu másla z farmy Doj, bylo $\frac{7}{8} \cdot 2h = \frac{7}{4}h$, z farmy Hoj to bylo $\frac{3}{4}h$ a ze všech tří farem dohromady $\frac{9}{10} \cdot 7h = \frac{63}{10}h$. Množství mléka, které šlo na výrobu másla z farmy Joj, bylo

$$\frac{63}{10}h - \frac{7}{4}h - \frac{3}{4}h = \frac{126 - 50}{20}h = \frac{76}{20}h = \frac{19}{5}h.$$

Celkem se na farmě Joj vydojilo $4h = \frac{20}{5}h$ mléka, tedy na výrobu másla poslali $\frac{19}{20} = 95\,\%$ jejich mléka.

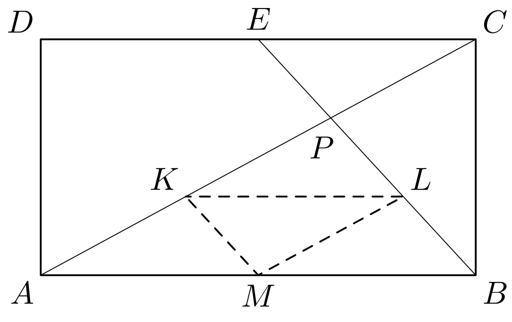
Hodnocení. 2 body za formulaci pomocí neznámých; 2 body za dílčí postřehy a úpravy; 2 body za výsledek a kvalitu komentáře.

Z9–II–4

Obdélník $ABCD$ má obsah $82\,\text{cm}^2$. Bod E je středem strany CD a bod P je průsečíkem úseček AC a BE.

Určete obsah trojúhelníku ABP. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Úsečky AB a CE jsou rovnoběžné a pro jejich velikosti platí $|AB| = 2|CE|$. Proto je trojúhelník CEP shodný s příčkovými trojúhelníky trojúhelníku ABP, tzn. s trojúhelníky KLP, AMK, MBL a LKM určenými středními příčkami ABP jako na obrázku:



Zejména $|AK| = |KP| = |PC|$ neboli $|AP| = \frac{2}{3}|AC|$. Trojúhelníky ABP a ABC mají společný vrchol B a jemu protilehlé strany leží na téže přímce, tedy pro jejich obsahy platí

$$S_{ABP} = \frac{2}{3} S_{ABC}.$$

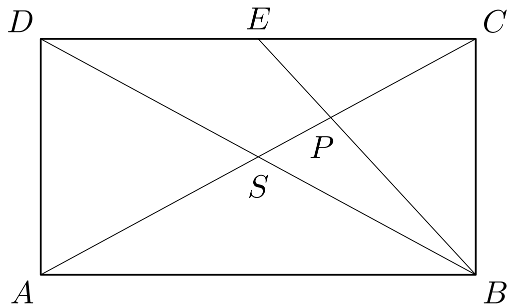
Trojúhelník ABC je polovinou obdélníku $ABCD$, tedy platí

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Celkem dostáváme

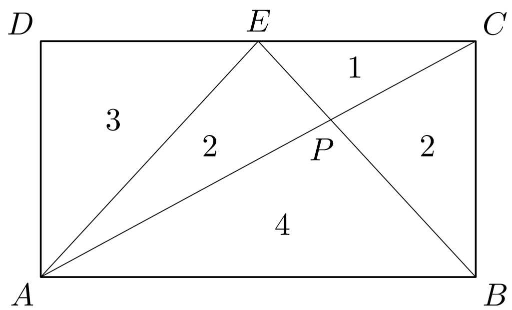
$$S_{ABP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 82 = 27{,}\overline{3}\,(\mathrm{cm}^2).$$

Jiné řešení. Úhlopříčky obdélníku $ABCD$ se protínají ve svých polovinách (tento bod označíme S) a bod E je středem úsečky CD. Proto jsou úsečky SC a BE těžnicemi trojúhelníku BCD, tedy jejich průsečík P je těžištěm.



Zejména $|AS| = |SC|$ a $|SC| = 3|SP|$, tedy $|AP| = 4|SP|$ a $|AC| = 6|SP|$. Odtud dostáváme $|AP| = \frac{2}{3}|AC|$ a dále postupujeme stejně jako v předchozím řešení.

Poznámky. Se znalostí poměru $|AP| : |AC| = 2 : 3$ či $|AP| : |PC| = 2 : 1$ lze obdélník $ABCD$ rozdělit na trojúhelníky se známými poměry obsahů (viz obrázek) a odtud vyjádřit poměr obsahu trojúhelníku ABP a obsahu obdélníku $ABCD$ jako $4 : 12 = 1 : 3$.



Poměr $|AP| : |PC| = 2 : 1$ lze odvodit z podobnosti (stejnolehlosti) trojúhelníků ABP a CEP, tzn. z faktu, že úsečky AB a CE jsou rovnoběžné a pro jejich velikosti platí $|AB| = 2|CE|$.

Hodnocení. 2 body za rozbor a dílčí postřehy; 2 body za pomocné vztahy; 2 body za výsledek a kvalitu komentáře.