74. ročník Matematické olympiády (2024/2025)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Předpokládejme, že pro reálná čísla a, b mají výrazy $a^2 + b$ a $a + b^2$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být?* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro různá reálná čísla a, b mají výrazy $a^2 - b^2$ a $a - b$ stejnou hodnotu. Dokažte, že hodnota $a + b$ je 1.

N2. Jaké nejmenší hodnoty může pro reálné číslo a nabývat výraz $a^2 + 3a$?

N3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $a^2 + b = c$, $b^2 + c = a$, $c^2 + a = b$.

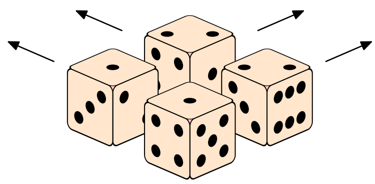
D1. Předpokládejme, že pro reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ mají výrazy $a_1^2 + a_2, a_2^2 + a_3, \ldots, a_{n-1}^2 + a_n$ a $a_n^2 + a_1$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být?

D2. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí $a^2(b + c) = b^2(c + a) = c^2(a + b)$. Určete všechny možné hodnoty výrazu $(a + b + c)^2/(a^2 + b^2 + c^2)$.

D3. Pro reálná čísla x a y platí $x^3 + y^3 \leqq 2$. Dokažte, že pak rovněž $x + y \leqq 2$.

D4. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla. Ukažte, že všechna tři čísla $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$, $c^2 + a + b$ nemohou být zároveň druhé mocniny celých čísel.

2. *Martin k sobě přikládá hrací kostky (stejné velikostí i rozmístěním čísel) tak, aby byly vyskládané do tvaru čtverce libovolné velikosti a aby vždy na dvou přiléhajících bočních stěnách byla táž čísla. Kolik nejvíce různých čísel se může vyskytnout na horních stěnách kostek?* (Martin Panák, Josef Tkadlec)



Návodné a doplňující úlohy:

V úlohách o skládání kostek předpokládáme, že na k sobě přiléhajících stěnách kostek jsou vždy dvě stejná čísla.

N1. Místo do čtverce skládáme kostky do řady. Kolik nejvíce různých čísel se může vyskytnout na horních stěnách kostek?

N2. Kostky skládáme do čtverce (tj. do kvádru tvaru $n \times n \times 1$). Může se na dvou sousedních bočních stěnách čtverce (tj. na sousedních stěnách $n \times 1$ složeného kvádru) objevit číslo 1?

D1. Z kostek jsme poskládali krychli $3 \times 3 \times 3$. Určete možné hodnoty součtů všech 54 viditelných čísel za předpokladu, že každá kostka má na protějších stěnách čísla se součtem 7.

D2. Čtvercová tabulka 10×10 je vyplněna písmeny A, B, C, D tak, že každá podtabulka 2×2 obsahuje každé ze čtyř písmen jednou. Dokažte, že existuje řádek nebo sloupec, který obsahuje právě dvě různá písmena.

D3. Určete nejmenší možné n, pro které lze dovnitř krychle $2020 \times 2020 \times 2020$ umístit n kvádrů $2020 \times 1 \times 1$ tak, aby každý kvádr měl stěny rovnoběžné se stěnami krychle, žádné dva kvádry se neprotínaly (dotýkat se mohou) a aby se každá ze čtyř obdélníkových stěn každého kvádru dotýkala buď jiné obdélníkové stěny jiného kvádru nebo některé stěny celé krychle.

3. *Na tabuli jsou napsána navzájem různá přirozená čísla se součtem* 2024. *Každé z nich kromě nejmenšího je násobkem součtu všech menších napsaných čísel. Kolik nejvíce čísel může na tabuli být?* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechny dvojice různých přirozených čísel, v nichž větší číslo je násobkem toho menšího a jejich součet je 74.

N2. Jakou největší délku může mít rostoucí posloupnost kladných celých čísel, ve které je každý člen násobkem předchozího a poslední člen je roven 1000?

D1. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí rovnost

$$n + d(n) + d(d(n)) + \ldots = 2021,$$

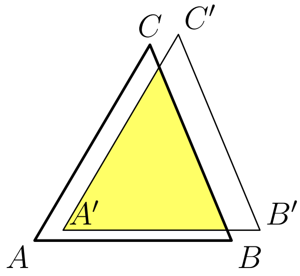
kde $d(0) = d(1) = 0$ a pro $k > 1$ je $d(k)$ superdělitel čísla k (tj. jeho největší dělitel d s vlastností $d < k$).

D2. O lichém prvočísle p řekneme, že je speciální, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p. Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální?

D3. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$ s následující vlastností: pokud seřadíme dělitele čísla $n!$ vzestupně jako $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n!$, potom platí $d_2 - d_1 \leqq d_3 - d_2 \leqq \ldots \leqq d_k - d_{k-1}$.

D4. Určete všechna složená čísla $n > 1$ s následující vlastností: pokud seřadíme dělitele čísla n vzestupně jako $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$, potom d_i je dělitelem součtu $d_{i+1} + d_{i+2}$ pro každé $1 \leqq i \leqq k - 2$.

4. *Pro trojúhelník ABC platí $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|CA| = 15$. Jeho posunutím o vektor délky 1 vznikne trojúhelník $A'B'C'$. Určete nejmenší možný obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$.* (Tomáš Bárta)



Návodné a doplňující úlohy:

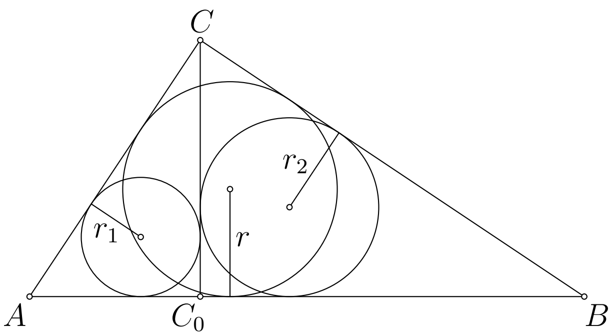
N1. Uvnitř trojúhelníku ABC na jeho střední příčce rovnoběžné se stranou BC je dán bod P. Rovnoběžky se stranami AB, AC vedené bodem P protnou stranu BC postupně v bodech Q, R. Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR je roven čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC.

N2. Spočtěte obsah trojúhelníku se stranami délek $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.

D1. Určete *největší* možný obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$.

D2. Pro daná kladná čísla a a d platí $d \leqq \frac{a}{\sqrt{2}}$. Posunutím čtverce $ABCD$ o straně délky a o libovolný vektor délky d vznikne čtverec $A'B'C'D'$. Určete největší možný a také nejmenší možný obsah průniku čtverců $ABCD$ a $A'B'C'D'$.

D3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme CC_0 výšku k přeponě AB a dále označme r, r_1, r_2 postupně poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, ACC_0, BCC_0. Dokažte, že $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.



D4. V pravoúhlém trojúhelníku s vepsanou kružnicí o poloměru r má výška k přeponě velikost v. Dokažte nerovnosti

$$0{,}4 < \frac{r}{v} < 0{,}5.$$

D5. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2.

D6. Dokažte, že pro libovolný trojúhelník T o obsahu 1 existuje přímka p, pro kterou má průnik trojúhelníku T a jeho obrazu v osové souměrnosti podle přímky p obsah větší než $\frac{3}{4}$.

5. *Saba se snaží z přízemí nekonečně vysokého mrakodrapu dostat do n-tého patra pomocí zvláštního výtahu. Ve výtahu jsou tlačítka $0, 1, 2, \ldots$ Po prvním stisknutí tlačítka pojede výtah nahoru a po každém dalším jede vždy opačným směrem, než posledně, přičemž po stisknutí tlačítka k popojede vždy o 2^k pater. Navíc každé další stisknuté tlačítko musí mít menší číslo než to předešlé. Dokažte, že Saba se do každého patra $n \geqq 1$ může dostat právě dvěma různými postupy.* (Morteza Saghafian)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Kam (a kolika postupy) se Saba může dostat, pokud ve výtahu budou jen tlačítka 0, 1, 2?

N2. Dokažte, že pokud výtah nemění směr (tedy jezdí pouze nahoru), může se Saba do každého patra $n \geqq 1$ dostat právě jedním postupem.

N3. Dokažte, že (kladný) rozdíl dvou různých mocnin dvojky lze vyjádřit jako součet několika po sobě jdoucích mocnin dvojky (jedné nebo více).

D1. Máme rovnoramenné váhy a 4 závaží, která můžeme pokládat na misky vah. a) Najděte příklad sady 4 závaží, pomocí které můžeme odměřit každou celočíselnou váhu od 1 po 15, pokud máme dovoleno pokládat závaží jen na levou misku vah. b) Najděte příklad sady 4 závaží, pomocí které můžeme odměřit každou celočíselnou váhu od 1 po 40, pokud máme dovoleno pokládat závaží na obě misky vah.

D2. Dokažte, že každé přirozené číslo n lze vyjádřit právě jedním způsobem jako

$$n = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \ldots + c_k \cdot k!,$$

kde $k \geqq 1$ a $0 \leqq c_i \leqq i$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, přitom $c_k \neq 0$.

D3. Je dáno celé číslo $z < -1$. Dokažte, že jakékoli nenulové celé číslo n má vyjádření

$$n = c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \ldots + c_1 z + c_0,$$

kde $k \geqq 0$ a $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$ jsou celá čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, |z| - 1\}$. Ukažte rovněž, že za podmínky $c_k \neq 0$ je takové vyjádření daného n jediné. (V případě $z = -2$ se jedná o vyjádření čísla n v „minusdvojkové“ soustavě. Poziční soustavy se zápornými základy našly praktická uplatnění i z důvodu, že i záporná čísla jsou v nich zapisována bez znaménka, například $-7 = (1001)_{-2}$. Viz také Wikipedia.)

D4. Fibonacciho čísla F_n jsou definována jako $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro každé $n \geqq 3$. Dokažte, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet jednoho nebo více navzájem různých Fibonacciho čísel tak, že tento součet neobsahuje žádná dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla. Dále dokažte, že bez použití F_1 je dokonce toto vyjádření jednoznačné.

D5. Beruška Blanka sedí v rovině s kartézskou soustavou souřadnic a začne skákat rovnoběžně se souřadnicovými osami tak, že v n-té minutě pro každé přirozené číslo n skočí právě jednou, a to v některém ze čtyř možných směrů s délkou skoku rovnou Fibonaccimu číslu F_n (definovaném v D4). Předpokládejme, že první dva Blančiny skoky byly navzájem kolmé. Dokažte, že se Blanka už nikdy nemůže vrátit tam, odkud začala skákat.

6. *Označme I_A, I_B, I_C po řadě středy kružnic připsaných stranám BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Průsečíky výšek trojúhelníků I_ABC, AI_BC, ABI_C označme po řadě X, Y, Z. Dokažte, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou shodné.* (Michal Janík)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že v trojúhelníku ABC je osa vnějšího úhlu u vrcholu A kolmá k ose vnitřního úhlu u vrcholu A.

N2. Dokažte, že trojúhelník tvořený středními příčkami daného trojúhelníku je mu podobný.

N3. Uvnitř šestiúhelníku $ABCDEF$ leží bod P tak, že čtyřúhelníky $ABCP$, $CDEP$ a $EFAP$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že trojúhelníky ACE a DFB jsou shodné.

V doplňujících úlohách používáme značení ze zadání soutěžní úlohy.

D1. Dokažte, že úsečka I_AI je průměrem kružnice opsané trojúhelníku I_ABC.

D2. V trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek, M střed strany BC a H' obraz bodu H ve středové souměrnosti podle bodu M. Dokažte, že úsečka AH' je průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

D3. Označme S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} středy stran AB, BC, CA trojúhelníku ABC. Dokažte, že se přímky AX, BY a CZ protínají v jednom bodě, a to ve středu kružnice vepsané příčkovému trojúhelníku $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$ trojúhelníku ABC.

D4. a) Dokažte, že střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC je současně průsečíkem výšek trojúhelníku $I_AI_BI_C$. b) Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku ABC je současně Feuerbachovou kružnicí* trojúhelníku $I_AI_BI_C$. c) Dokažte, že středy oblouků ABC, BCA, CAB kružnice opsané trojúhelníku ABC jsou současně středy stran trojúhelníku $I_AI_BI_C$.

D5. V trojúhelníku ABC splňujícím $|AB| < |AC|$ označme M střed strany BC, N střed oblouku BAC kružnice opsané a I střed kružnice vepsané. Dokažte, že $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INA|$.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

* Feuerbachova kružnice daného trojúhelníku je kružnice procházející mj. středy jeho stran a patami jeho výšek. Viz *S. Horák*: Kružnice, ŠMM sv. 16, str. 78–80.

1. *Předpokládejme, že pro reálná čísla a, b mají výrazy a^2+b a $a+b^2$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být?* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro různá reálná čísla a, b mají výrazy a^2-b^2 a $a-b$ stejnou hodnotu. Dokažte, že hodnota $a+b$ je 1. [Ze zadání $a^2-b^2=a-b$, po vydělení nenulovým výrazem $a-b$ dostáváme $a+b=1$.]

N2. Jaké nejmenší hodnoty může pro reálné číslo a nabývat výraz a^2+3a? [Upravíme

$$a^2+3a=\left(a+\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}\geqq -\tfrac{9}{4},$$

nejmenší hodnota je tedy $-\frac{9}{4}$, kterou výraz nabývá pro $a=-\frac{3}{2}$.]

N3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $a^2+b=c$, $b^2+c=a$, $c^2+a=b$. [Po sečtení rovnic dostaneme $a^2+b^2+c^2=0$, tedy $a=b=c=0$. Zkouškou, která je zde nutná, se snadno přesvědčíme, že $a=b=c=0$ je skutečně i řešením původní soustavy.]

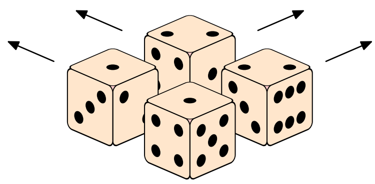
D1. Předpokládejme, že pro reálná čísla $a_1,\ldots,a_n$ mají výrazy $a_1^2+a_2, a_2^2+a_3,\ldots, a_{n-1}^2+a_n$ a $a_n^2+a_1$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být? [Řešení této úlohy najdete v komentářích, které budou zveřejněny na stránkách MO po termínu odevzdání úloh domácího kola.]

D2. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí $a^2(b+c)=b^2(c+a)=c^2(a+b)$. Určete všechny možné hodnoty výrazu $(a+b+c)^2/(a^2+b^2+c^2)$. [B–73–S–3]

D3. Pro reálná čísla x a y platí $x^3+y^3\leqq 2$. Dokažte, že pak rovněž $x+y\leqq 2$. [B–57–1–3]

D4. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla. Ukažte, že všechna tři čísla a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b nemohou být zároveň druhé mocniny celých čísel. [APMO–2011–P1]

2. *Martin k sobě přikládá hrací kostky (stejné velikostí i rozmístěním čísel) tak, aby byly vyskládané do tvaru čtverce libovolné velikosti a aby vždy na dvou přiléhajících bočních stěnách byla táž čísla. Kolik nejvíce různých čísel se může vyskytnout na horních stěnách kostek?* (Martin Panák, Josef Tkadlec)



Návodné a doplňující úlohy:

V úlohách o skládání kostek předpokládáme, že na k sobě přiléhajících stěnách kostek jsou vždy dvě stejná čísla.

N1. Místo do čtverce skládáme kostky do řady. Kolik nejvíce různých čísel se může vyskytnout na horních stěnách kostek? [Nejvýše 4. V řadě kostek se na přiléhajících stěnách střídají jen dvě čísla, žádné z nich proto nemůže být na horní stěně. Zbylá čtyři čísla na horních stěnách být mohou.]

N2. Kostky skládáme do čtverce (tj. do kvádru tvaru $n\times n\times 1$). Může se na dvou sousedních bočních stěnách čtverce (tj. na sousedních stěnách $n\times 1$ složeného kvádru) objevit číslo 1? [Nemůže. V řadě kostek se na přiléhajících stěnách střídají jen dvě čísla, takže všechny kostky v řadě, která má číslo 1 na boční stěně, budou mít číslo 1 pouze na stěnách s ní rovnoběžných. Pokud by také někde na sousední boční stěně bylo číslo 1, musela by je nějaká kostka mít na dvou svých stěnách, což je vyloučeno.]

D1. Z kostek jsme poskládali krychli $3 \times 3 \times 3$. Určete možné hodnoty součtů všech 54 viditelných čísel za předpokladu, že každá kostka má na protějších stěnách čísla se součtem 7. [Součet je vždy roven $27 \cdot 7 = 189$. Jelikož jsou v každé řadě tři kostky za sebou, viditelná čísla na jejích koncích mají stejně jako na jedné kostce součet 7. Těchto dvojic je 27, proto je odpověď $27 \cdot 7 = 189$. (Krychli skutečně poskládat lze.)]

D2. Čtvercová tabulka 10×10 je vyplněna písmeny A, B, C, D tak, že každá podtabulka 2×2 obsahuje každé ze čtyř písmen jednou. Dokažte, že existuje řádek nebo sloupec, který obsahuje právě dvě různá písmena. [Ukažte, že pokud jsou v některém řádku aspoň tři různá písmena, pak v něm někde tři různá leží vedle sebe, řekněme v pořadí $\dots ABC \dots$ V řádku pod i nad nimi musí být tři písmena $\dots CDA \dots$ Zopakováním tohoto argumentu potom vyjde, že v uvedených třech sloupcích (a dokonce ve všech sloupcích) musí být jen dvě různá písmena.]

D3. Určete nejmenší možné n, pro které lze dovnitř krychle $2020 \times 2020 \times 2020$ umístit n kvádrů $2020 \times 1 \times 1$ tak, aby každý kvádr měl stěny rovnoběžné se stěnami krychle, žádné dva kvádry se neprotínaly (dotýkat se mohou) a aby se každá ze čtyř obdélníkových stěn každého kvádru dotýkala buď jiné obdélníkové stěny jiného kvádru nebo některé stěny celé krychle. [USAMO–2020–P2]

3. *Na tabuli jsou napsána navzájem různá přirozená čísla se součtem* 2024*. Každé z nich kromě nejmenšího je násobkem součtu všech menších napsaných čísel. Kolik nejvíce čísel může na tabuli být?* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechny dvojice různých přirozených čísel, v nichž větší číslo je násobkem toho menšího a jejich součet je 74. [Vyhovují dvojice (1,73) a (2,72). Označíme-li hledaná čísla a a $k \cdot a$, kde $k \geqq 2$ je celé, pak $74 = a + ka = a(k+1)$, přičemž $k + 1 \geqq 3$, takže $k + 1$ je dělitelem čísla $74 = 2 \cdot 37$ větším než 3, tedy je to buď 37 nebo 74.]

N2. Jakou největší délku může mít rostoucí posloupnost kladných celých čísel, ve které je každý člen násobkem předchozího a poslední člen je roven 1000? [7. Každý další člen musí mít v rozkladu na prvočinitele aspoň jednoho prvočinitele navíc oproti předchozímu členu. Jelikož číslo $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ má 6 prvočinitelů, může být celkem členů až 7 (první člen totiž může být 1).]

D1. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí rovnost

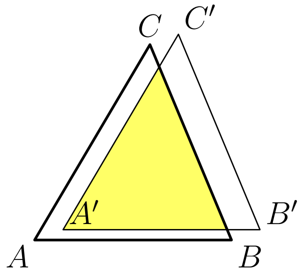
$$n + d(n) + d(d(n)) + \ldots = 2021,$$

kde $d(0) = d(1) = 0$ a pro $k > 1$ je $d(k)$ superdělitel čísla k (tj. jeho největší dělitel d s vlastností $d < k$). [MO–70–A–III–4]

D2. O lichém prvočísle p řekneme, že je speciální, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p. Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální? [MO–73–A–I–4]

D3. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$ s následující vlastností: pokud seřadíme dělitele čísla $n!$ vzestupně jako $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n!$, potom platí $d_2 - d_1 \leqq d_3 - d_2 \leqq \ldots \leqq d_k - d_{k-1}$. [USAMO–2024–P1]

D4. Určete všechna složená čísla $n > 1$ s následující vlastností: pokud seřadíme dělitele čísla n vzestupně jako $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$, potom d_i je dělitelem součtu $d_{i+1} + d_{i+2}$ pro každé $1 \leqq i \leqq k - 2$. [IMO–2023–P1]



4. *Pro trojúhelník ABC platí $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|CA| = 15$. Jeho posunutím o vektor délky 1 vznikne trojúhelník $A'B'C'$. Určete nejmenší možný obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$.* (Tomáš Bárta)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvnitř trojúhelníku ABC na jeho střední příčce rovnoběžné se stranou BC je dán bod P. Rovnoběžky se stranami AB, AC vedené bodem P protnou stranu BC postupně v bodech Q, R. Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR je roven čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC. [Trojúhelníky PQR a ABC mají rovnoběžné strany, takže jsou podobné. Výška ke straně QR má poloviční délku nežli výška ke straně BC, takže koeficient podobnosti je $1/2$. Obsah trojúhelníku PQR je proto roven $(1/2)^2 = 1/4$ obsahu trojúhelníku ABC.]

N2. Spočtěte obsah trojúhelníku se stranami délek $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. [$6\sqrt{6} \doteq 14{,}7$. Stačí dosadit do Heronova vzorce* $S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ je polovina obvodu. Vyjde $s = 9$ a $S_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$. Případně lze postupovat také následovně: Z kosinové věty $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ plyne $\cos\gamma = (a^2 + b^2 - c^2)/(2ab) = 1/5$, takže $\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = 2\sqrt{6}/5$ a $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 6\sqrt{6}$. (Zmíněný Heronův vzorec lze odvodit podobně jako v uvedeném výpočtu pomocí úprav $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2\gamma) = \frac{1}{4}a^2b^2(1 + \cos\gamma) \cdot (1 - \cos\gamma) = \frac{1}{16}\big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big)$.)]

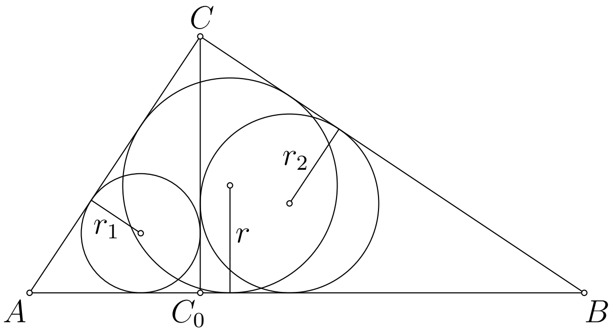
D1. Určete *největší* možný obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$. [Vyjde $84 \cdot (14/15)^2 = 5488/75 \doteq 73{,}17$. Ukažte, že maximum nastane, pokud bude vektor posunutí rovnoběžný s některou ze stran trojúhelníků. Příslušný koeficient podobnosti pak bude $12/13$, $13/14$ nebo $14/15$, přičemž maximum dává právě poslední z nich.]

D2. Pro daná kladná čísla a a d platí $d \leqq \frac{a}{\sqrt{2}}$. Posunutím čtverce $ABCD$ o straně délky a o libovolný vektor délky d vznikne čtverec $A'B'C'D'$. Určete největší možný a také nejmenší možný obsah průniku čtverců $ABCD$ a $A'B'C'D'$. [Maximum je $a(a-d)$, minimum je $(a - d/\sqrt{2})^2$. Průnikem je totiž obdélník o obsahu $S = (a-x)(a-y)$, kde nezáporná čísla x, y jsou délky kolmých průmětů vektoru posunutí na přímky AB, AD. Pro součet $s = x + y$ zřejmě

* O tomto proslulém vzorci se více dočtete v článku *J. Blažek*: Čtyři důkazy Heronova vzorce.

platí $s \geqq d$ a také $s \leqq d\sqrt{2}$, neboť $x^2 + y^2 = d^2$ a $(x+y)^2 \leqq 2(x^2+y^2)$. Užitím rovnosti $xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}d^2$ zapíšeme obsah S jako funkci součtu s: $S(s) = a^2 - (x+y)a + xy = \frac{1}{2}s^2 - as + a^2 - \frac{1}{2}d^2$. To je kvadratická funkce s minimem v bodě $s = a$, který leží díky předpokladu $d \leqq a/\sqrt{2}$ napravo od intervalu $\langle d, d\sqrt{2}\rangle$ se všemi možnými hodnotami s. Zbývá využít toho, že na tomto intervalu je uvažovaná funkce klesající a že hodnoty $s = d$ a $s = d\sqrt{2}$ jsou dosažitelné. Proto je $S(d)$ hledané maximum a $S(d\sqrt{2})$ hledané minimum.]

D3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme CC_0 výšku k přeponě AB a dále označme r, r_1, r_2 postupně poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, ACC_0, BCC_0. Dokažte, že $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.



[Trojúhelníky ABC, ACC_0 a CBC_0 jsou navzájem podobné, takže existuje reálné číslo x takové, že $r = x \cdot |AB|$, $r_1 = x \cdot |AC|$, $r_2 = x \cdot |BC|$. Dokazovaná rovnost je tudíž x^2-násobkem rovnosti z Pythagorovy věty pro $\triangle ABC$.]

D4. V pravoúhlém trojúhelníku s vepsanou kružnicí o poloměru r má výška k přeponě velikost v. Dokažte nerovnosti

$$0{,}4 < \frac{r}{v} < 0{,}5.$$

[*S. Horák*: Nerovnosti v trojúhelníku, ŠMM sv. 57, příklad 25, str. 50–52.]

D5. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2. [MO–71–A–I–2]

D6. Dokažte, že pro libovolný trojúhelník T o obsahu 1 existuje přímka p, pro kterou má průnik trojúhelníku T a jeho obrazu v osové souměrnosti podle přímky p obsah větší než $\frac{3}{4}$. [Z trojúhelníkové nerovnosti lze odvodit, že v každém trojúhelníku existují dvě strany, pro jejichž délky a, b platí $1 \leqq a/b < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Pokud za p zvolíme osu úhlu mezi těmito stranami, vyjde průnik o obsahu alespoň $3 - \sqrt{5} \doteq 0{,}764$, viz také USAMO–1996–P3. Komplikovanějším způsobem lze dokázat, že vhodnou volbou přímky p lze zajistit průnik o obsahu dokonce alespoň $2\sqrt{2} - 2 \doteq 0{,}828$, tuto konstantu navíc nelze zlepšit, viz Wikipedia.]

5. *Saba se snaží z přízemí nekonečně vysokého mrakodrapu dostat do n-tého patra pomocí zvláštního výtahu. Ve výtahu jsou tlačítka $0, 1, 2, \ldots$ Po prvním stisknutí tlačítka pojede výtah nahoru a po každém dalším jede vždy opačným směrem, než posledně, přičemž po stisknutí tlačítka k popojede vždy o 2^k pater. Navíc každé další stisknuté tlačítko musí mít menší číslo než to předešlé. Dokažte, že Saba se do každého patra $n \geqq 1$ může dostat právě dvěma různými postupy.* (Morteza Saghafian)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Kam (a kolika postupy) se Saba může dostat, pokud ve výtahu budou jen tlačítka 0, 1, 2? [Pokud prvně stiskne tlačítko 2, může se dostat do pater $4 = 2^2$, $3 = 2^2 - 2^0$, $2 = 2^2 - 2^1$, $3 = 2^2 - 2^1 + 2^0$. Jinak se může dostat do pater $2 = 2^1$, $1 = 2^1 - 2^0$ a $1 = 2^0$. Celkově se do patra 4 může dostat jedním postupem a do pater 1, 2 a 3 dvěma postupy.]

N2. Dokažte, že pokud výtah nemění směr (tedy jezdí pouze nahoru), může se Saba do každého patra $n \geqq 1$ dostat právě jedním postupem. [Máme dokázat, že každé $n \geqq 1$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako součet různých celočíselných mocnin dvojky. Toto tvrzení je známé jako jednoznačnost zápisu ve dvojkové soustavě. Načrtneme důkaz matematickou indukcí: Stačí dokázat, že pro každé $k \geqq 1$ má 2^{k+1} podmnožin množiny $\{2^0, 2^1, \ldots, 2^k\}$ navzájem různé součty prvků, a to čísla od 0 po $2^{k+1} - 1$. Pro $k = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k - 1$. Podmnožiny, které neobsahují prvek 2^k, mají podle předpokladu součty $0, \ldots, 2^k - 1$. Podmnožiny, které prvek 2^k obsahují, mají součty o 2^k větší, tedy $2^k + 0, \ldots, 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$.]

N3. Dokažte, že (kladný) rozdíl dvou různých mocnin dvojky lze vyjádřit jako součet několika po sobě jdoucích mocnin dvojky (jedné nebo více). [Pro každá dvě přirozená čísla $a > b$ platí $2^a - 2^b = 2^b + 2^{b+1} + \ldots + 2^{a-1}$, jak snadno ověříme přičtením 2^b k oběma stranám a opakovaným využitím vztahu $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.]

D1. Máme rovnoramenné váhy a 4 závaží, která můžeme pokládat na misky vah. a) Najděte příklad sady 4 závaží, pomocí které můžeme odměřit každou celočíselnou váhu od 1 po 15, pokud máme dovoleno pokládat závaží jen na levou misku vah. b) Najděte příklad sady 4 závaží, pomocí které můžeme odměřit každou celočíselnou váhu od 1 po 40, pokud máme dovoleno pokládat závaží na obě misky vah. [a) Jedna taková sada je $\{1, 2, 4, 8\}$. b) Jedna taková sada je $\{1, 3, 9, 27\}$.]

D2. Dokažte, že každé přirozené číslo n lze vyjádřit právě jedním způsobem jako

$$n = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \ldots + c_k \cdot k!,$$

kde $k \geqq 1$ a $0 \leqq c_i \leqq i$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, přitom $c_k \neq 0$. [Jde o vyjádření čísla n v tzv. faktoriálové soustavě (viz Wikipedia). Nejprve dokážeme pro každé přirozené m pomocnou rovnost $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + m \cdot m! = (m+1)! - 1$ – stačí buď v součtu $(2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + \cdots + ((m+1)-1) \cdot m!$ roznásobit závorky a výsledek zjednodušit, nebo užít matematickou indukci. Tu ale hlavně využijeme k důkazu tvrzení ze zadání vlastní úlohy D2: Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí; platí-li pro všechna n' menší než dané číslo $n > 1$, najdeme k němu nejprve jednoznačně určená přirozená čísla k a c, kde $c \leqq k$, taková, že $c \cdot k! \leqq n < (c + 1) \cdot k!$. Z pomocné rovnosti pro $m = k$ plyne, že nalezené k je právě to, které musí být v každém vyjádření n ze zadání D2 a že navíc v něm musí platit $c_k = c$; z indukčního předpokladu pro $n' = n - c \cdot k! < n$ pak dostáváme i jednoznačně určené koeficienty c_i s indexy $i < k$, neboť $n' < k!$ (několik posledních z těchto koeficientů mohou být nuly, v případě $n' = 0$ to jsou dokonce samé nuly).]

D3. Je dáno celé číslo $z < -1$. Dokažte, že jakékoli nenulové celé číslo n má vyjádření

$$n = c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \ldots + c_1 z + c_0,$$

kde $k \geqq 0$ a $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$ jsou celá čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, |z|-1\}$. Ukažte rovněž, že za podmínky $c_k \neq 0$ je takové vyjádření daného n jediné. (V případě $z = -2$ se jedná o vyjádření čísla n v „minusdvojkové“ soustavě. Poziční soustavy se zápornými základy našly praktická uplatnění i z důvodu, že i záporná čísla jsou v nich zapisována bez znaménka, například $-7 = (1001)_{-2}$. Viz také Wikipedia.) [Využijte toho, že čísla $c_0, c_1, c_2, \ldots$ lze postupně určit kongruencemi

$$c_0 \equiv n \pmod{|z|}, \quad c_1 \equiv \frac{n - c_0}{z} \pmod{|z|}, \quad c_2 \equiv \frac{n - c_0 - c_1 z}{z^2} \pmod{|z|}, \ldots]$$

D4. Fibonacciho čísla F_n jsou definována jako $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro každé $n \geqq 3$. Dokažte, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet jednoho nebo více navzájem různých Fibonacciho čísel tak, že tento součet neobsahuje žádná dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla. Dále dokažte, že bez použití F_1 je dokonce toto vyjádření jednoznačné. [Zeckendorfova věta (Wikipedia)]

D5. Beruška Blanka sedí v rovině s kartézskou soustavou souřadnic a začne skákat rovnoběžně se souřadnicovými osami tak, že v n-té minutě pro každé přirozené číslo n skočí právě jednou, a to v některém ze čtyř možných směrů s délkou skoku rovnou Fibonaccimu číslu F_n (definovaném v D4). Předpokládejme, že první dva Blančiny skoky byly navzájem kolmé. Dokažte, že se Blanka už nikdy nemůže vrátit tam, odkud začala skákat. [ICMC–6.1–P3]

6. *Označme I_A, I_B, I_C po řadě středy kružnic připsaných stranám BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Průsečíky výšek trojúhelníků I_ABC, AI_BC, ABI_C označme po řadě X, Y, Z. Dokažte, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou shodné.* (Michal Janík)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že v trojúhelníku ABC je osa vnějšího úhlu u vrcholu A kolmá k ose vnitřního úhlu u vrcholu A. [Součet velikostí vnitřního a vnějšího úhlu u jednoho vrcholu trojúhelníku je 180°. Součet jejich polovin je proto 90°.]

N2. Dokažte, že trojúhelník tvořený středními příčkami daného trojúhelníku je mu podobný. [Jelikož střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná se základnou a má oproti ní poloviční délku, je podle věty *sss* příčkový trojúhelník podobný celému trojúhelníku s koeficientem podobnosti 1/2. Jiný postup: Z vlastnosti těžnic plyne, že příčkový trojúhelník je obrazem původního trojúhelníku ve stejnolehlosti s koeficientem $-1/2$.]

N3. Uvnitř šestiúhelníku $ABCDEF$ leží bod P tak, že čtyřúhelníky $ABCP$, $CDEP$ a $EFAP$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že trojúhelníky ACE a DFB jsou shodné. [Jelikož jsou čtyřúhelníky $ABCP$ a $CDEP$ rovnoběžníky, jsou úsečky AB, CP a DE rovnoběžné a shodné. Proto je i čtyřúhelník $ABDE$ rovnoběžník, tedy úsečky AE a DB jsou shodné. Analogicky jsou shodné i úsečky CE s FB a úsečky AC s DF, což dohromady podle věty *sss* už znamená shodnost trojúhelníků ACE a DFB.]

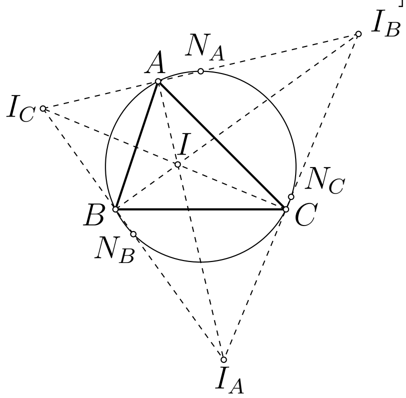
V doplňujících úlohách používáme značení ze zadání soutěžní úlohy.

D1. Dokažte, že úsečka I_AI je průměrem kružnice opsané trojúhelníku I_ABC. [Podle N1 platí $|\sphericalangle IBI_A| = 90° = |\sphericalangle ICI_A|$.]

D2. V trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek, M střed strany BC a H' obraz bodu H ve středové souměrnosti podle bodu M. Dokažte, že úsečka AH' je průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC. [Přímka BH' je obrazem přímky CH ve středové souměrnosti podle bodu M, proto jsou tyto přímky rovnoběžné. Jelikož přímka CH je kolmá ke straně AB, je úhel ABH' pravý. Analogicky je pravý i úhel ACH', tedy skutečně body B, C leží na kružnici nad průměrem AH'.]

D3. Označme S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} středy stran AB, BC, CA trojúhelníku ABC. Dokažte, že se přímky AX, BY a CZ protínají v jednom bodě, a to ve středu kružnice vepsané příčkovému trojúhelníku $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$ trojúhelníku ABC. [Řešení této úlohy najdete v komentářích, které budou zveřejněny na stránkách MO po termínu odevzdání úloh domácího kola.]

D4. a) Dokažte, že střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC je současně průsečíkem výšek trojúhelníku $I_AI_BI_C$. b) Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku ABC je současně Feuerbachovou kružnicí* trojúhelníku $I_AI_BI_C$. c) Dokažte, že středy oblouků ABC, BCA, CAB kružnice opsané trojúhelníku ABC jsou současně středy stran trojúhelníku $I_AI_BI_C$. [a) Např. přímky I_BI_C a I_AI jsou navzájem kolmé podle úlohy N1, protože jsou to osy vnějšího a vnitřního úhlu u vrcholu A. b) Podle části a) jsou totiž body A, B, C patami výšek v $\triangle I_AI_BI_C$. c) Střed N_A úsečky I_BI_C je podle Thaletovy věty středem kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku BCI_BI_C , takže platí $|N_AB| = |N_AC|$ a $|\sphericalangle BN_AC| = 2 \cdot |\sphericalangle BI_BC| = 2 \cdot |\sphericalangle IAC| = |\sphericalangle BAC|$, kde předposlední rovnost platí díky tomu, že čtyřúhelník $AICI_B$ je tětivový (opět Thaletova věta). Bod N_A je proto skutečně středem oblouku BAC.]



* Feuerbachova kružnice daného trojúhelníku je kružnice procházející mj. středy jeho stran a patami jeho výšek. Viz *S. Horák*: Kružnice, ŠMM sv. 16, str. 78–80.

D5. V trojúhelníku ABC splňujícím $|AB| < |AC|$ označme M střed strany BC, N střed oblouku BAC kružnice opsané a I střed kružnice vepsané. Dokažte, že $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INA|$. [Označme I_B, I_C středy kružnic připsaných postupně stranám AC a AB. Čtyřúhelník BCI_BI_C je tětivový (Thaletova věta), takže $\triangle BIC \sim \triangle I_CII_B$ (věta *uu*). Podle úlohy D4 je bod N středem úsečky I_BI_C. Úsečky IM, IN jsou proto odpovídající si těžnice v podobných trojúhelnících $\triangle BIC$ a $\triangle I_CII_B$, tudíž podobné jsou i jejich „poloviny“ – trojúhelníky IMB a INI_C. Odtud už $|\sphericalangle IMB| = |\sphericalangle INI_C| = |\sphericalangle INA|$.]