65. ročník Mezinárodní matematické olympiády

Letošní ročník Mezinárodní matematické olympiády (IMO) se uskutečnil 11.–22. července v anglickém městě Bath. Původně se měla soutěž konat v ukrajinském Kyjevě, z důvodu ruské invaze však byla přesunuta a role pořádající země se chopila Anglie, která ji naposledy organizovala v roce 2019. Místní organizační tým tak musel v poměrně krátkém čase naplánovat celou akci, což určitě nebyl lehký úkol. Díky cenným zkušenostem z IMO před pěti lety a finanční podpoře hlavního sponzora, společnosti XTX Markets, se jim to ale podařilo.

Mezinárodní matematické olympiády se letos zúčastnilo celkem 609 soutěžících ze 108 zemí, kteří strávili něco přes týden na půdě University of Bath. Prvně ale do Spojeného království dorazili vedoucí jednotlivých delegací. Ti se setkali v nedalekém Bristolu, kde z 31 návrhů zařazených do tzv. shortlistu vybrali šest soutěžních úloh. O tři dny později se na cestu vydal i zbytek české výpravy, sestavající ze šesti soutěžících a pedagogické vedoucí. Na letošním IMO české družstvo reprezentovali: *Anastasia Bredichina* (7/8 G Jana Keplera, Praha 6), *Tereza Černá* (8/8 G Litoměřická, Praha 9), *David Hromádka* (7/8 G Nad Alejí, Praha 6), *Pavel Hyánek* (6/8 G Brno, třída Kapitána Jaroše), *Erik Ježek* (2/4 Smíchovská SPŠ a G, Praha 5) a *Veronika Menšíková* (6/8 Arcibiskupské G, Praha 2, Korunní). Vedoucím pak byl *Danil Koževnikov* z University of Edinburgh a pedagogickou vedoucí *Lenka Kopfová* z MFF UK.

Na fotce v horní řadě zleva: *Lenka Kopfová*, *Erik Ježek*, *David Hromádka*, *Danil Koževnikov*, *Pavel Hyánek*, průvodkyně *Viktoriia Matviiuk*
Dolní řada: *Veronika Menšíková*, *Tereza Černá*, *Anastasia Bredichina*.

Ubytování, volnočasové aktivity i samotná soutěž byly situovány na půdě kampusu univerzity v Bathu. Letošní zahájení IMO bylo, k radosti většiny zúčastněných, výrazně stručnější než obvykle. Krátký proslov pronesl jen bývalý dlouholetý předseda výboru IMO profesor Geoff Smith, jenž pobídnul všechny přítomné k vzájemné komunikaci a toleranci. Dále popřál, ať všichni přítomní alespoň na dobu konání soutěže hodí všechny politické neshody za hlavu a prostě si užijí týden ve společnosti lidí, kteří sdílí jejich nadšení matematikou.

Další, a patrně nejdůležitější položkou programu byla samotná soutěž, která proběhla 16. a 17. července. Soutěžící měli oba dny 4,5 hodiny na vyřešení tří obtížných úloh, přičemž za každou z nich bylo možné získat až 7 bodů.

Po dvou náročných počítacích dnech měli soutěžící možnost vyrazit na různé exkurze. Česká výprava navštívila Stonehenge a Buckinghamský palác, zatímco vedoucí a koordinátoři opravovali a hodnotili účastnická řešení. Kromě zmíněných exkurzí se soutěžící mohli zapojit do všemožných kratších volnočasových aktivit na kampusu univerzity nebo si poslechnout některé z bohatého výběru přednášek. Mezi pozvanými přednášejícími byly velmi inspirativní osobnosti, za zmínku stojí například dva laureáti Fieldsovy medaile Terence Tao a Maryna Viazovska, dále Grant Sanderson, zakladatel známého matematického YouTube kanálu 3Blue1Brown, či výzkumník Thang Luong z Google DeepMindu, který hovořil o projektu AlphaGeometry (jehož cílem je vycvičit AI model na řešení geometrických úloh na úrovni IMO).

Po dvou náročných dnech opravování a koordinování se všichni zúčastnění opět setkali v budově divadla v Bathu na slavnostním zakončení, kde byly také vyhlášeny finální výsledky. Připomeňme, že standardně si zhruba polovina soutěžících domů odveze medaili, přičemž počty zlatých (Z), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí se drží přibližně poměru 1 : 2 : 3. Pro letošní ročník to znamenalo, že k zisku zlata, stříbra, resp. bronzu bylo potřeba dosáhnout alespoň 29, 22, resp. 16 bodů.

Českému družstvu se podařilo vybojovat dvě stříbra, dva bronzy a dvě čestná uznání (HM). Podrobnější výsledky uvádíme v tabulce:

Umístění		1	2	3	4	5	6	Body	Cena
100.	Erik Ježek	6	3	0	7	7	1	24	S
125.	David Hromádka	7	2	0	7	7	0	23	S
283.	Pavel Hyánek	7	2	0	7	0	0	16	B
283.	Veronika Menšíková	7	1	0	7	1	0	16	B
327.	Anastasia Bredichina	7	0	0	7	1	0	15	HM
457.	Tereza Černá	2	0	0	7	0	0	9	HM
49.	Celkem	36	8	0	42	16	1	103	

Celkově se tak český tým umístnil v neoficiálním pořadí zemí na 49. místě. Na první příčce v neoficiální soutěži zemí skončil tým z USA, absolutním vítězem v oficiální výsledkové listině se stal *Haojia Shi* z Číny, kterému se jako jedinému povedlo dosáhnout plného počtu bodů. Poznamenejme, že *Matej Bachníček* ze Slovenska vybojoval zlatou medaili a 29. místo v celkovém pořadí. Podrobnější výsledky letošního ročníku lze najít na oficiálních stránkách IMO.

Český tým s medailemi.

Na závěr uvádíme zadání úloh z obou soutěžních dnů. Poukažme také na kontroverzní úlohu číslo pět se šnekem Turbo. Tato kombinatorika, jež je zadáním i řešením velmi přístupná dokonce žákům základní školy, v mnohých vyvolala poněkud rozporuplné názory. Důkazem její netradičnosti budiž, že ji půlka čínského týmu nevyřešila, což se u středně obtížných úloh na IMO stává jen velmi zřídka. Také poznamenejme, že v posledních letech se rapidně rozvíjí pokusy o vyřešení úloh z IMO pomocí AI. Letos by umělá inteligence vytrénovaná Googlem vyřešila čtyři ze šesti úloh (vše až na dvě kombinatoriky), čímž by dosáhla na stříbrnou medaili. Více informací lze najít v článku zde.

První soutěžní den (16. července 2024)

Úloha 1. Určete všechna reálná čísla α taková, že pro každé kladné celé n je číslo

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

násobkem n. (Zápisem $\lfloor z \rfloor$ rozumíme největší celé číslo které nepřevyšuje z. Platí například $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ a $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.)

(Kolumbie)

Úloha 2. Určete všechny dvojice kladných celých čísel (a, b), pro něž existují kladná celá g a N taková, že rovnost

$$\mathrm{NSD}(a^n + b, b^n + a) = g$$

platí pro všechna celá čísla $n \geq N$. (Zápisem $\mathrm{NSD}(x, y)$ rozumíme největšího společného dělitele celých čísel x, y.)

(Indonésie)

Úloha 3. Mějme nekonečnou posloupnost kladných celých čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a kladné celé číslo N. Předpokládejme, že pro všechna $n > N$ je a_n rovno počtu výskytů čísla a_{n-1} mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Dokažte, že alespoň jedna z posloupností $a_1, a_3, a_5, \ldots$ nebo $a_2, a_4, a_6, \ldots$ je eventuálně periodická. (O posloupnosti $b_1, b_2, b_3, \ldots$ řekneme, že je eventuálně periodická, pokud existují kladná celá p a M taková, že rovnost $b_{m+p} = b_m$ platí pro všechna $m \geq M$.)

(Austrálie)

Druhý soutěžní den (17. července 2024)

Úloha 4. Je dán trojúhelník ABC, ve kterém platí $|AB| < |AC| < |BC|$. Buď ω kružnice vepsaná ABC se středem I. Nechť X je bod na přímce BC různý od C takový, že rovnoběžka s AC skrz X je tečnou ω. Analogicky, nechť Y je bod na přímce BC různý od B takový, že rovnoběžka s AB skrz Y je tečnou ω. Přímka AI protíná kružnici opsanou ABC podruhé v bodě $P \neq A$. Označme K a L středy úseček AC a AB. Dokažte, že platí $|\angle KIL| + |\angle YPX| = 180°$.

(Polsko)

Úloha 5. Šnek Turbo hraje hru v tabulce s 2024 řádky a 2023 sloupci. Ve 2022 políčkách tabulky jsou schované příšerky. Na začátku, Turbo neví jak přesně jsou příšerky rozmístěny, ví ovšem, že každý řádek kromě prvního a posledního obsahuje právě jednu příšerku a každý sloupec obsahuje nejvýše jednu příšerku. Turbo se snaží v několika pokusech dostat z prvního řádku do posledního. V každém pokusu si Turbo může zvolit libovolné počáteční políčko v prvním řádku, načež se může opakovaně posunout z políčka, kde se nachází, na políčko sousedící s ním stranou. (Každé políčko tak může navštívit i vícekrát). Vstoupí-li Turbo na políčko s příšerkou, jeho pokus tím končí a teleportuje se zpátky do prvního řádku. Příšerky se nehýbou a Turbo si pamatuje, zda se na políčku, které navštívil, nachází příšerka. Pokud dosáhne libovolného políčka z posledního řádku, jeho pokus skončí, stejně jako celá hra. Určete nejmenší hodnotu n pro níž má Turbo strategii, která zaručí, že se dostane do posledního řádku po nejvýše n pokusech, nehledě na to, jak jsou příšerky rozmístěny.

(Hong Kong)

Úloha 6. Nechť $\mathbb{Q}$ značí množinu racionálních čísel. O funkci $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ řekneme, že je *lázeňská*, pokud splňuje následující podmínku: Pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$ platí alespoň jedna z rovností

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{nebo} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokažte, že existuje celé číslo c takové, že pro každou lázeňskou funkci f existuje nejvýše c různých racionálních hodnot vyjádřitelných ve tvaru $f(r) + f(-r)$ pro nějaké racionální číslo r a nalezněte nejmenší možnou hodnotu c.

(Japonsko)