



## XII. ČESKO-POLSKO-SLOVENSKÁ MATEMATICKÁ SOUTĚŽ JUNIORŮ

Soutěž jednotlivců  
20. května 2023

**Úloha 1.** Na počátku jsou na tabuli napsána čísla 1 a 2. V jednom kroku vybereme kladné reálné číslo  $x$  a dvojici čísel  $(a, b)$  napsaných na tabuli nahradíme dvojicí

$$\left(a + \frac{x}{b}, b + \frac{x}{a}\right).$$

Může (po konečném počtu kroků) nastat situace, že na tabuli budou napsána čísla 2 a 3?

**Úloha 2.** Pro kolik (neprázdných) podmnožin množiny  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 11\}$  je součin jejích prvků třetí mocninou přirozeného čísla?

**Úloha 3.** V konvexním čtyřúhelníku  $ABCD$  platí  $|AB| = |BD| = |DC|$  a  $AB \perp BD \perp DC$ . Označme  $M$  střed jeho strany  $BC$ . Dokažte, že platí  $|\sphericalangle BAM| + |\sphericalangle DCA| = 45^\circ$ .

**Úloha 4.** Pro celá čísla  $a, b, c$  platí  $a + b + c = 1$  a  $ab + bc + ca < abc$ . Dokažte, že  
$$ab + bc + ca < 2abc.$$

**Úloha 5.** Pro přirozené číslo  $n$  označme  $S(n)$  součet číslic jeho desítkového zápisu. Najděte nejmenší přirozené číslo  $n$  splňující  $4S(n) = 3S(2n)$ .

*Čas: 3 hodiny a 30 minut.  
Za každou úlohu lze získat 5 bodů.*